第 2 节 三大统一思想：角度、名称、次数（★★★）

内容提要

解决求值、求角、化简等问题的三大核心思想：角度统一、名称统一、次数统一，在具体的问题中，它们都是值得尝试的方向，把握好这三个统一，可以解决一系列问题.

1．角度统一：包括二倍角与单倍角之间的统一；要求的角与已知的角之间的统一；题干中涉及多个角，向某一个或几个角统一等.

2．名称统一：问题中涉及正弦、余弦、正切多个函数名的，若能将函数名统一起来，往往有利于分析问题. 例如正弦、余弦的齐次分式，可统一化为正切计算.

3．次数统一：三角代数式中各项次数不统一的，可尝试利用降次公式或升次公式将次数统一.

典型例题

类型Ⅰ：角度统一

【例 1】（2020•新课标Ⅰ卷）已知$\alpha\in(0,\pi)$，且$3\cos 2\alpha-8\cos\alpha=5$，则$\sin\alpha=$（　　）

（A）$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　（B）$\dfrac{2}{3}$　（C）$\dfrac{1}{3}$　（D）$\dfrac{\sqrt{5}}{9}$

解析： 所给等式中既有2α，又有α，结合要求的是$\sin\alpha$，所以把二倍角向单倍角统一，

因为$3\cos 2\alpha-8\cos\alpha=5$，所以$3(2\cos^2\alpha-1)-8\cos\alpha=5$，解得：$\cos\alpha=-\dfrac{2}{3}$或 2（舍），

又$\alpha\in(0,\pi)$，所以$\sin\alpha>0$，故$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

答案： A

【变式 1】已知$\alpha\in(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{6})$，且$\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{3}{5}$，则$\cos\alpha=$_____.

解析： 将求值的角α统一成已知的角$\alpha+\dfrac{\pi}{6}$，设$t=\alpha+\dfrac{\pi}{6}$，则$\alpha=t-\dfrac{\pi}{6}$，且$\sin t=\dfrac{3}{5}$，

所以$\cos\alpha=\cos(t-\dfrac{\pi}{6})=\cos t\cos\dfrac{\pi}{6}+\sin t\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos t+\dfrac{1}{2}\sin t$　①，

接下来由$\sin t$求$\cos t$，得先求出t的范围，才能确定$\cos t$的正负，

因为$\alpha\in(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{6})$，所以$t=\alpha+\dfrac{\pi}{6}\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$，从而$\cos t<0$，故$\cos t=-\sqrt{1-\sin^2 t}=-\dfrac{4}{5}$，

代入式①可得$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times(-\dfrac{4}{5})+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{3-4\sqrt{3}}{10}$.

答案： $\dfrac{3-4\sqrt{3}}{10}$

【变式 2】已知$\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，$\beta\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$，$\sin(\alpha+\beta)=-\dfrac{3}{5}$，$\sin\beta=\dfrac{1}{3}$，则$\cos\alpha=$_____.

解析： 将求值角统一成已知角，为便于观察，将$\alpha+\beta$换元，

设 $\alpha+\beta=\gamma$，则 $\alpha=\gamma-\beta$，且 $\sin\gamma=-\dfrac{3}{5}$，

所以 $\cos\alpha=\cos(\gamma-\beta)=\cos\gamma\cos\beta+\sin\gamma\sin\beta=\cos\gamma\cos\beta+(-\dfrac{3}{5})\times\dfrac{1}{3}=\cos\gamma\cos\beta-\dfrac{1}{5}$ ①，

接下来求 $\cos\gamma$ 和 $\cos\beta$，需先分析 γ 的范围，因为 $\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$， $\beta\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$，所以 $\dfrac{\pi}{2}<\gamma=\alpha+\beta<\dfrac{3\pi}{2}$，

故 $\cos\gamma=-\sqrt{1-\sin^2\gamma}=-\dfrac{4}{5}$，$\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，代入式①得：$\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}\times(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3})-\dfrac{1}{5}=\dfrac{8\sqrt{2}-3}{15}$.

答案： $\dfrac{8\sqrt{2}-3}{15}$

【变式 3】已知 $\alpha,\beta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，且 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$， $\tan 2\beta=\dfrac{1}{2}$，则 $\cos(\dfrac{\alpha}{2}-\beta)=$（　　）

（A）$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　（B）$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　（C）$\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$　（D）$\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

解析： 给值求值，可将要求值的角向已知角统一，为了简化已知角，将 2β 换元，

令 $\gamma=2\beta$，则 $\beta=\dfrac{\gamma}{2}$，且 $\tan\gamma=\dfrac{1}{2}$， $\cos(\dfrac{\alpha}{2}-\beta)=\cos\dfrac{\alpha-\gamma}{2}$，

这样问题就转化成已知 $\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\\ \tan\gamma=\dfrac{1}{2}\end{cases}$，求 $\cos\dfrac{\alpha-\gamma}{2}$，可先计算 $\cos(\alpha-\gamma)$，再用倍角公式计算 $\cos\dfrac{\alpha-\gamma}{2}$，

因为 $\alpha,\beta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，所以 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，且 $\gamma\in(0,\pi)$，结合 $\tan\gamma=\dfrac{1}{2}>0$ 可得 $\gamma\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，

所以 $\sin\gamma=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$， $\cos\gamma=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，故 $\cos(\alpha-\gamma)=\cos\alpha\cos\gamma+\sin\alpha\sin\gamma=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{\sqrt{5}}{5}=\dfrac{4}{5}$，

又 $\cos(\alpha-\gamma)=2\cos^2\dfrac{\alpha-\gamma}{2}-1$，所以 $2\cos^2\dfrac{\alpha-\gamma}{2}-1=\dfrac{4}{5}$，故 $\cos\dfrac{\alpha-\gamma}{2}=\pm\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，

该舍掉哪个答案，得研究 $\dfrac{\alpha-\gamma}{2}$ 的范围才能确定，

因为 $\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$， $\gamma\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，所以 $\dfrac{\alpha-\gamma}{2}\in(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4})$，从而 $\cos\dfrac{\alpha-\gamma}{2}>0$，故 $\cos\dfrac{\alpha-\gamma}{2}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

答案： C

【反思】 变式 1、2、3 都是给值求值问题，这类题常将要求值的角统一成已知的角，解析中都用了换元法，若能观察出题目中角的关系，也可直接凑，无需换元；另外，角度的限定与取舍思路值得深思.

【变式 4】$\dfrac{2\sin 43^{\circ}-\sqrt{3}\sin 13^{\circ}}{\cos 13^{\circ}}=$______.

解析： 式子中有 43° 和 13°，注意到 $43^{\circ}=30^{\circ}+13^{\circ}$，所以可用此式代换 43°，将角统一成 13°，

原式$=\dfrac{2\sin(30^\circ+13^\circ)-\sqrt{3}\sin13^\circ}{\cos13^\circ}=\dfrac{2(\frac{1}{2}\cos13^\circ+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin13^\circ)-\sqrt{3}\sin13^\circ}{\cos13^\circ}=\dfrac{\cos13^\circ}{\cos13^\circ}=1$.

答案：1

【变式 5】$\sin(\theta+75^\circ)+\cos(\theta+45^\circ)-\sqrt{3}\cos(\theta+15^\circ)=$_____.

解析：式子中有$\theta+75^\circ$，$\theta+45^\circ$，$\theta+15^\circ$这三个角，随便统一成哪一个都可以求出该式的值，例如，我们可以统一成$\theta+15^\circ$，先将其换元，

令$\alpha=\theta+15^\circ$，则$\theta+75^\circ=\alpha+60^\circ$，$\theta+45^\circ=\alpha+30^\circ$，

所以原式$=\sin(\alpha+60^\circ)+\cos(\alpha+30^\circ)-\sqrt{3}\cos\alpha$

$=\sin\alpha\cos60^\circ+\cos\alpha\sin60^\circ+\cos\alpha\cos30^\circ-\sin\alpha\sin30^\circ-\sqrt{3}\cos\alpha$

$=\dfrac{1}{2}\sin\alpha+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\dfrac{1}{2}\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha=0$.

答案：0

【反思】从变式 4 和变式 5 可以看出，具体角度求值，先考虑角度间的关系，能否化为统一.

类型Ⅱ：名称统一

【例 2】函数$f(x)=\sin x+3\cos^2x(-\dfrac{\pi}{3}\le x\le\dfrac{\pi}{2})$的最大值为_____.

解析：$f(x)$的解析式中既有$\sin x$，又有$\cos x$，可将$\cos^2x$换成$1-\sin^2x$，从而统一函数名，

由题意，$f(x)=\sin x+3(1-\sin^2x)=-3(\sin x-\dfrac{1}{6})^2+\dfrac{37}{12}$，

因为$-\dfrac{\pi}{3}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$，所以$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\le\sin x\le1$，故当$\sin x=\dfrac{1}{6}$时，$f(x)$取得最大值$\dfrac{37}{12}$.

答案：$\dfrac{37}{12}$

【反思】当条件或所求中既有正弦，又有余弦时，可考虑用$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$来消去其中一个，将函数名统一为正弦或余弦，往往更易于处理.

【例 3】若$\tan\beta=\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$，则（　　）

（A）$\tan(\alpha-\beta)=1$　（B）$\tan(\alpha-\beta)=-1$　（C）$\tan(\alpha+\beta)=1$　（D）$\tan(\alpha+\beta)=-1$

解析：选项都是正切，故将所给等式右侧的分式上下同除以$\cos\alpha$，将函数名统一为正切，

由题意，$\tan\beta=\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\dfrac{\tan\alpha-1}{\tan\alpha+1}$，所以$\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta=\tan\alpha-1$，

从而$1+\tan\alpha\tan\beta=\tan\alpha-\tan\beta$，故$\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=1$，即$\tan(\alpha-\beta)=1$.

答案：A

【变式】$\tan 20^\circ + 4\sin 20^\circ =$_____.

解析： 为了统一函数名，可考虑切化弦或弦化切，由于弦化切不方便，故切化弦，

$$\tan 20^\circ + 4\sin 20^\circ = \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} + 4\sin 20^\circ = \frac{\sin 20^\circ + 4\sin 20^\circ \cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{\sin 20^\circ + 2\sin 40^\circ}{\cos 20^\circ},$$

对于 40° 和 20°，除开用过的二倍角，还能怎样联系？其实可通过 $40^\circ = 60^\circ - 20^\circ$ 将角统一成 20°，

所以 $\tan 20^\circ + 4\sin 20^\circ = \dfrac{\sin 20^\circ + 2\sin 40^\circ}{\cos 20^\circ} = \dfrac{\sin 20^\circ + 2\sin(60^\circ - 20^\circ)}{\cos 20^\circ}$

$$= \frac{\sin 20^\circ + 2(\sin 60^\circ \cos 20^\circ - \cos 60^\circ \sin 20^\circ)}{\cos 20^\circ} = \frac{\sin 20^\circ + 2(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20^\circ - \frac{1}{2}\sin 20^\circ)}{\cos 20^\circ} = \frac{\sqrt{3}\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \sqrt{3}.$$

答案： $\sqrt{3}$

【反思】 ①已知正切或者求正切时，往往会考虑弦化切，其它时候常切化弦，当然会有例外，所以可以两方面尝试；②数字角的联系可能是多方面的，例如 40° 与 20° 除了二倍关系外，还有 $40^\circ + 20^\circ = 60^\circ$.

类型III：次数统一

【例 4】函数 $f(x) = \sin^2 x + \dfrac{1}{2}\sin 2x (x \in \mathbf{R})$ 的最大值为_____.

解析： 从解析式来看，化简的方向有两个，要么对 $\sin^2 x$ 降次，要么对 $\sin 2x$ 升次，都能统一次数，若选后者，可化为 $f(x) = \sin^2 x + \sin x\cos x$，不易求出最值，故对 $\sin^2 x$ 降次，

由题意，$f(x) = \sin^2 x + \dfrac{1}{2}\sin 2x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2} + \dfrac{1}{2}\sin 2x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x - \dfrac{\pi}{4}) + \dfrac{1}{2}$，所以 $f(x)_{\max} = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$.

答案： $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$

【变式 1】（2021 • 新高考 I 卷）若 $\tan\theta = -2$，则 $\dfrac{\sin\theta(1+\sin 2\theta)}{\sin\theta + \cos\theta} =$（　　）

（A）$-\dfrac{6}{5}$　　（B）$-\dfrac{2}{5}$　　（C）$\dfrac{2}{5}$　　（D）$\dfrac{6}{5}$

解析： 看到 $1 + \sin 2\theta$ 这个结构，想到升次公式 $1 \pm \sin 2\theta = (\sin\theta \pm \cos\theta)^2$，

$$\frac{\sin\theta(1+\sin 2\theta)}{\sin\theta + \cos\theta} = \frac{\sin\theta(\sin\theta + \cos\theta)^2}{\sin\theta + \cos\theta} = \sin\theta(\sin\theta + \cos\theta),$$

此式可凑分母 $\sin^2\theta + \cos^2\theta$ 统一分子分母次数，再同除以 $\cos^2\theta$ 将函数名统一为正切，

$\sin\theta(\sin\theta + \cos\theta) = \dfrac{\sin\theta(\sin\theta + \cos\theta)}{\sin^2\theta + \cos^2\theta} = \dfrac{\tan\theta(\tan\theta + 1)}{\tan^2\theta + 1} = \dfrac{2}{5}$，所以 $\dfrac{\sin\theta(1+\sin 2\theta)}{\sin\theta + \cos\theta} = \dfrac{2}{5}$.

答案： C

【反思】 涉及 $\sin^2\alpha$，$\cos^2\alpha$ 等二次式化简时可考虑降次，变为 $A\sin(\omega x + \varphi)$ 的形式，如例 4；化简时遇到 1 可考虑升次，可用 $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$，$1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$，$1 \pm \sin 2\alpha = (\cos\alpha \pm \sin\alpha)^2$，$1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$

这些公式来升次. 具体用哪一个，结合题目的其它形式来看.

【变式2】(2022 •新高考Ⅰ卷节选)记ΔABC的内角A,B,C的对边分别为a,b,c,已知$\dfrac{\cos A}{1+\sin A}=\dfrac{\sin 2B}{1+\cos 2B}$，若$C=\dfrac{2\pi}{3}$，求$B$.

解：（所给等式中有$1+\cos 2B$，这是升次标志，为了让右侧分子分母角度统一，分子也用二倍角公式）

$\dfrac{\sin 2B}{1+\cos 2B}=\dfrac{2\sin B\cos B}{2\cos^2 B}=\dfrac{\sin B}{\cos B}$，由题意，$\dfrac{\cos A}{1+\sin A}=\dfrac{\sin 2B}{1+\cos 2B}$，所以$\dfrac{\cos A}{1+\sin A}=\dfrac{\sin B}{\cos B}$，

从而$\cos A\cos B=\sin B+\sin A\sin B$，故$\cos A\cos B-\sin A\sin B=\sin B$，所以$\cos(A+B)=\sin B$，

又$C=\dfrac{2\pi}{3}$，所以$A+B=\pi-C=\dfrac{\pi}{3}$，从而$\sin B=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$，因为$C=\dfrac{2\pi}{3}$，所以$0<B<\dfrac{\pi}{3}$，故$B=\dfrac{\pi}{6}$.

类型Ⅳ：三大统一思想综合应用

【例5】（2021·全国甲卷）若$\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，$\tan 2\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{2-\sin\alpha}$，则$\tan\alpha=$（　　）

（A）$\dfrac{\sqrt{15}}{15}$　（B）$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　（C）$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　（D）$\dfrac{\sqrt{15}}{3}$

解析：有正切，先统一函数名，弦化切困难，故切化弦，因为$\tan 2\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{2-\sin\alpha}$，所以$\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\dfrac{\cos\alpha}{2-\sin\alpha}$，

接下来为了统一角度，可对左边用倍角公式，其中$\cos 2\alpha$该选哪个，方向性还不明确，可先化分子，

$\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\dfrac{\cos\alpha}{2-\sin\alpha}\Rightarrow\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos 2\alpha}=\dfrac{\cos\alpha}{2-\sin\alpha}$，左右可约掉$\cos\alpha$，先考虑$\cos\alpha$是否可能为0，

因为$\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，所以$\cos\alpha>0$，故$\dfrac{2\sin\alpha}{\cos 2\alpha}=\dfrac{1}{2-\sin\alpha}$，

此时发现应将$\cos 2\alpha$化为$1-2\sin^2\alpha$，从而统一函数名为正弦，

所以$\dfrac{2\sin\alpha}{1-2\sin^2\alpha}=\dfrac{1}{2-\sin\alpha}$，解得：$\sin\alpha=\dfrac{1}{4}$，所以$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\sqrt{15}}{15}$.

答案：A

【变式1】已知$0<x<\dfrac{\pi}{2}$，则$f(x)=\dfrac{1+\cos 2x+8\sin^2 x}{\sin 2x}$的最小值为_____.

解析：要求$f(x)$的最小值，先化简其解析式，我们发现分子有$1+\cos 2x$这一升次特征式，

由题意，$f(x)=\dfrac{1+\cos 2x+8\sin^2 x}{\sin 2x}=\dfrac{2\cos^2 x+8\sin^2 x}{2\sin x\cos x}$，

这个式子拆部分分式即可化正切，且恰好凑成积为定值，可用不等式$a+b\ge 2\sqrt{ab}$来求最小值，

所以$f(x)=\dfrac{2\cos^2 x+8\sin^2 x}{2\sin x\cos x}=\dfrac{\cos x}{\sin x}+\dfrac{4\sin x}{\cos x}=\dfrac{1}{\tan x}+4\tan x$，

因为 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\tan x>0$，故 $f(x)=\dfrac{1}{\tan x}+4\tan x\ge 2\sqrt{\dfrac{1}{\tan x}\cdot 4\tan x}=4$，

当且仅当 $\dfrac{1}{\tan x}=4\tan x$，即 $\tan x=\dfrac{1}{2}$时等号成立，所以 $f(x)_{\min}=4$.

答案：4

【反思】弦化切、切化弦没有严格的使用场景区分，在具体的问题中，它们都是值得尝试的方向，有时两种方法都能成功地解决问题.

【变式 2】已知锐角 α，β 满足 $\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\dfrac{\sin 2\beta}{1-\cos 2\beta}$，则 $\tan(\alpha-\beta)$的值为（　　）

（A）1　　（B）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　（C）-1　　（D）$-\sqrt{3}$

解析：观察分母有$1-\cos 2\beta$，这是升次的标志，为将角度统一为为 β，分子也升次，

因为 $\dfrac{\sin 2\beta}{1-\cos 2\beta}=\dfrac{2\sin\beta\cos\beta}{2\sin^2\beta}=\dfrac{1}{\tan\beta}$，所以代入条件等式可得 $\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\dfrac{1}{\tan\beta}$ ①，

我们要求的是 $\tan(\alpha-\beta)$，故将左侧上下同除以 $\cos\alpha$，弦化切分析，

又 $\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\dfrac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$，代入①可得 $\dfrac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\dfrac{1}{\tan\beta}$，所以 $\tan\beta-\tan\alpha\tan\beta=1+\tan\alpha$，

从而 $1+\tan\alpha\tan\beta=\tan\beta-\tan\alpha$，故 $\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=-1$，即 $\tan(\alpha-\beta)=-1$.

答案：C

【反思】本题清晰地展示了三大思想：①看到$1-\cos 2\beta$，想到升次；②对于 $\sin 2\beta$，为了角度统一，故用二倍角公式展开；③由于所求为正切，所以弦化切，统一函数名.

强化训练

类型Ⅰ：给值求值问题

1.（2022·甘肃兰州模拟改·★★）已知 $\cos(\theta-\dfrac{\pi}{5})=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\sin(2\theta+\dfrac{\pi}{10})=$______.

2.（2022·福建福州模拟·★★）已知 $\sin(\alpha-\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\alpha\in(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{4})$，则 $\sin\alpha=$_____.

3.（2022·北京模拟·★★★）已知 α，β 均为锐角，$\cos\alpha=\dfrac{1}{7}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{11}{14}$，则 $\cos\beta=$_____.

类型 II：三大思想的应用

4．（★★）若 $3\sin^2\alpha-5\cos\alpha-1=0$，则 $\cos 2\alpha=$_____.

5．（2023・福建模拟・★★）若 $\alpha\in(-\frac{\pi}{2},0)$，$2\tan\alpha=\frac{1}{\sin 2\alpha}$，则 $\sin\alpha=$（　　）

（A）$-\frac{\sqrt{2}}{2}$　（B）$\frac{\sqrt{2}}{2}$　（C）$-\frac{1}{2}$　（D）$\frac{1}{2}$

6．（2023・福建模拟・★★）已知 $16\cos^2\frac{\theta}{2}-3\cos 2\theta=3$，则 $\cos\theta=$（　　）

（A）$-\frac{\sqrt{5}}{3}$　（B）$-\frac{2}{3}$　（C）$\frac{2}{3}$　（D）$\frac{\sqrt{5}}{3}$

7．（2022・湖南模拟・★★）函数 $f(x)=\sin x\sin 2x-2\cos x$ 的最大值为_____.

8．（2019・新课标 II 卷・★★★）已知 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，$2\sin 2\alpha=\cos 2\alpha+1$，则 $\sin\alpha=$（　　）

（A）$\frac{1}{5}$　（B）$\frac{\sqrt{5}}{5}$　（C）$\frac{\sqrt{3}}{3}$　（D）$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

9．（2022・浙江台州期末・★★★）若$2\cos^2(\alpha-\frac{\pi}{3})+\cos 2\alpha=1$，则$\tan 2\alpha=$（　　）

（A）$-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　（B）$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　（C）$-\sqrt{3}$　　（D）$\sqrt{3}$

10．（2023・吉林长春模拟・★★★）若$\tan\alpha=-\frac{\cos\alpha}{3+\sin\alpha}$，则$\sin(2\alpha+\frac{\pi}{2})=$（　　）

（A）$\frac{1}{3}$　　（B）$\frac{2}{3}$　　（C）$\frac{7}{9}$　　（D）$\frac{8}{9}$

11．（★★★）若$\tan\frac{\theta}{2}=2$，则$\frac{1+\sin\theta+\cos\theta}{1+\sin\theta-\cos\theta}=$______.

12．（★★★）设$x\in(0,\frac{\pi}{2})$，则函数$y=\frac{2\sin^2 x+1}{\sin 2x}$的最小值为______.

13．（2022・云南曲靖模拟・★★★★）若$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$，且$(1+\cos 2\alpha)(1+\sin\beta)=\sin 2\alpha\cos\beta$，则下列结论正确的是（　　）

（A）$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$　　（B）$\alpha+\frac{\beta}{2}=\frac{\pi}{2}$　　（C）$2\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$　　（D）$\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$

类型III：具体角三角函数式化简求值

14．（2022・北京模拟・★★）$\frac{\sin 7^\circ+\cos 15^\circ\sin 8^\circ}{\cos 7^\circ-\sin 15^\circ\sin 8^\circ}=$______.

15．（2022・山西太原一模・★★★）$\sin 20^{\circ}+\sin 40^{\circ}=$（　　）